Maß- und Integrationstheorie

Übungsblatt 7

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Die Menge aller μ-Nullmengen bezeichnen wir mit $\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0\}$. Das Maß μ bzw. der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt vollständig, wenn aus $N \in \mathcal{N}_\mu$ und $M \subset N$ stets $M \in \mathcal{A}$ folgt.

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\mathcal{A}^*$ die Familie aller $E \subset \Omega$, für die es Mengen $A, B \in \mathcal{A}$ gibt mit $A \subset E \subset B$ und $\mu(B \backslash A) = 0$. Für $E \in \mathcal{A}^*$ definiere $\mu^*(E) := \mu(A)$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra, die $\mathcal{A}$ enthält;

(b) μ^* ist wohldefiniert;

(c) μ^* ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$;

(d) μ^* ist eine Fortsetzung von μ, d.h. $\mu^*(E) := \mu(E)$ für alle $E \in \mathcal{A}$.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Dann heißt $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, falls die Eigenschaften (a) bis (d) aus Aufgabe 2 erfüllt sind.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Seien f und g μ-messbar und es gelte $\int_A f \mathrm{d}\mu \leqslant \int_A g \mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass $f \leqslant g$ fast überall gilt.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{A}$-messbare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass
$$\nu(A) := \int_\Omega \mathbb{1}_A f(\omega) \mu(\mathrm{d}\omega)$$
ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert.

(b) Sei nun zusätzlich $\mu(\Omega) < \infty$ und f μ-f.ü. endlich. Zeigen Sie, dass ν σ-endlich ist.